年　　月　　日(　　曜日)　　時限目

氏名:　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　干支:

音律基礎①:『ドレミファ～の出自。で、音律って？』

by kotobuki hikaru

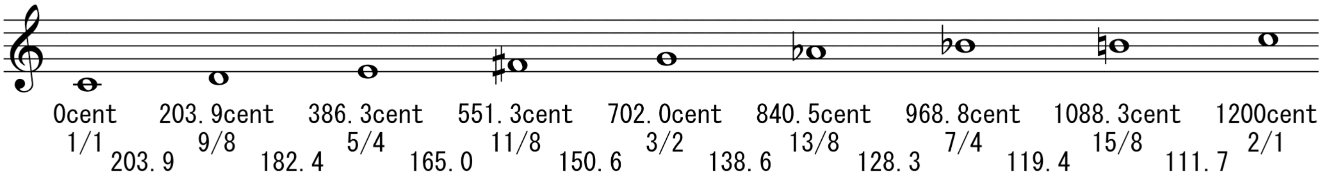
★「ドレミファ～はどっから来たんだ」ーその前夜

ドレミファ～の出自としても誉れ高き
どこまでも延々と続く自然倍音列

オクターブ上がるごとに間に入る音程がひとつづつ増えてくる。

ちなみに
第1～16倍音までをオクターブ内に収めると音階らしきものがみえてくる。

自然倍音による音階（第１～１６倍音）　　バルトークの倍音列音階は第6音を M6th にした7音＝Lyd♭7th で、これとは別



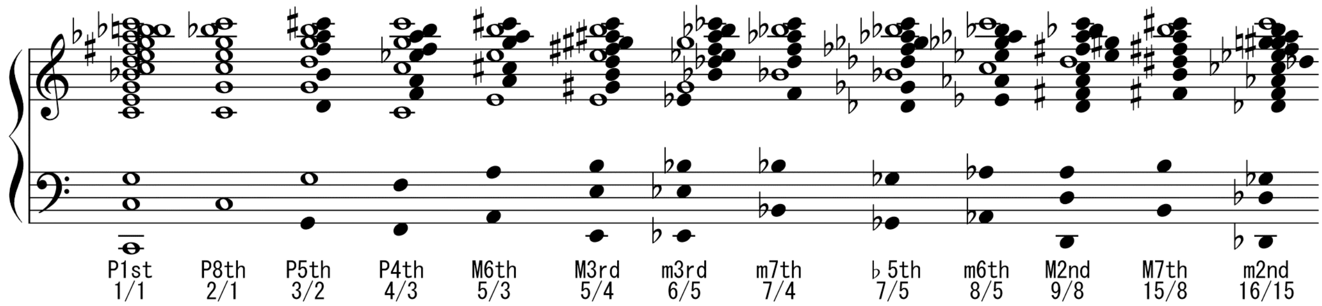
この音階らしきもの、
いかにも合理的なよーにも思える、gガ、これがそのままドレミファ～の出自では断じて無い。
　なぜなら、
このままぢゃどこをとってもオクターブ以外“**シンメトリーのかけらも無い＝どこをとっても転回が不可能＝同じ幅の音程がひとつも無い＝インターバルを保ったメロディの動きが不可能**”⇒キモチ悪くて歌えんってことだからねぇ。
　　もちろんこれぢゃコード進行も成り立たんし、実際、旋律にとってこの非合理的なズレは、まったく役立たずのズレだった。
そこでギリシャ人は、シンメトリーの基準となるインターバルの探求に着手した。

　Q:この世で最もユニゾンに近いの、それはどれ？
sine 波であれば、周波数比が最も小さい m2nd や M7th あたりってことになるんだろーが、楽音には自然倍音がたっぷりってことを考えてけば、別な答えがでちゃう。
　A:最もユニゾンに近いインターバル、それは P5th。
ってこと。
まずは、その理由を説明しちゃう。

★「ドレミファ～はどっから来たんだ」ーその壱（協和音程とは？＝共通倍音）

そもそも楽音には自然倍音がたっぷり、
　その楽音を2つ同時に鳴らした場合
倍音どうしがまったく同じ周波数(共通倍音)だと、倍音どうしは完全に溶け合う。

各インターバルに登場する共通倍音（下声の倍音に吸収合併される白玉）　〔周波数比×整数〕＝整数⇒共通倍音
よって、分母の回数おきに共通倍音が登場する



ちなみに素数7を用いる分割はそれぞれ
・m7th(7/4)⇒自然ホルンとかの金管楽器に登場する〔自然7度〕
・♭5th(7/5)⇒日本の琵琶で純正に調律された唯一の音程〔自然的三全音〕
・tritone を自然７度に対する4度＝♯4th と捉えれば、周波数比は 10/7 になる

これみりゃ明らか、いちばん溶け合うのは？⇒それはユニゾンとオクターブ
ユニゾンは勿論、オクターブも倍音どうしが全てまったく同じ周波数になるんで、完全に同化してしまう。

※溶け合った共通倍音の音量は、その位相と関係する。例えば、2つの倍音が同じ振り幅なら位相0度＝360度で振り幅が倍になるし、180度なら消えてしまう。ってこと

よーするに整数倍音だけで構成されてるオクターブは「ユニゾンに近い」っつーより、「ユニゾンと同じ」ってことだ。
そこで、もっかい最もユニゾンに近いインターバルを探してくと・・・・

共通倍音はいろんなインターバルん中にいろいろ見えるけど、なかでも、倍音次数が近い共通倍音(周波数比が過分数のインターバルに登場する共通倍音)どうしは、同じ音色なら一般に振り幅比も近いから、最も溶け合う＝同化する。

過分数によるインターバル　西洋音楽で実際に用いる素数(1とその数以外に約数がない正の整数)は 1,2,3,5 のみ

2/1	3/2	4/3	5/4	6/5	*7/6*	*8/7*	9/8	*10/9*	*11/10*	*12/11*	*13/12*	*14/13*	*15/14*	16/15
P8th	P5th	P4th	M3rd	m3rd	*m3rd*	*M2nd*	M2nd	*M2nd*	*M2nd*	*M2nd*	*m2nd*	*m2nd*	*m2nd*	m2nd

→ → → → → → → → ひたすらインターバルが狭くなっていく → →

しかも、
低次に共通倍音があれば、一般に振り幅比が大きいもんどうしだから、よけーわかりやすく溶け合う。

自然倍音列ん中で最初に登場するオクターブ以外の音＝第3倍音＝3/2＝P5th。
最初に登場するってことは＝共通倍音どうしの**倍音次数が近い＝低次に共通倍音を持つ＝メチャメチャ溶け合う**

※なんで、かっつーと、共通倍音ってことは・・・・
〔周波数比〕＝〔下声の倍音次数〕÷〔上声の倍音次数〕ってことだからね。
例：P5th の周波数比(3/2) ＝ 下声の倍音次数(3)÷上声の倍音次数(2)
よって、"下声の第3倍音"と"上声の第2倍音"は P5th の共通倍音だ。

各インターバルに登場する最初の共通倍音

協和音程 ←　　　　**→ 不協和音程**

1/1	2/1	3/2	4/3	5/3, 5/4	6/5	7/4, 7/5	8/5	9/8	15/8	16/15
				第3倍音 M6th		第4倍音 m7th				
完全に溶け合う										
基音 P1st	基音 P8th	第2倍音 P5th	第3倍音 P4th	第4倍音 M3rd	第5倍音 m3rd	第5倍音 ♭5th	第5倍音 m6th	第8倍音 M2nd	第8倍音 M7th	第15倍音 m2nd
基音 C0	**第2倍音** C1	**第3倍音** G1	**第4倍音** C2	**第5倍音** E2	**第6倍音** G2	**第7倍音** Bb2	**第8倍音** C3	**第9倍音** D3	**第15倍音** B3	**第16倍音** C4

↑
サイコーに溶け合う

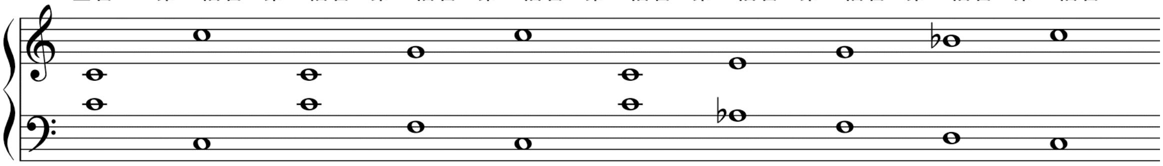
※結果的に最終頁の図「不協和曲線」と合致してるってとこに注目

協和音程の原理　ＣとＧ（完全５度）を同時に鳴らした場合

これで「最もユニゾンに近いインターバル」は判明した。
その、
最も<u>溶け合うインターバル</u>を堆積すれば、最も溶け合う<u>等間隔インターバル</u>が生まれるはずだ。

しかも、
それには副産物もある。こんなかんぢ
ユニゾン(1/1)・オクターブ(2/1)以外のインターバルを一つ設定すると、オクターブを挟んでシンメトリーな転回形（等間隔のインターバル）がもう一つ登場する。そして、そのインターバルも溶け合う。
公式：2/1＝{a/b}×{(b×2)/(a)} ←転回してからオクターブ上げるたのを掛けるってこと
例えば、2/1＝{5/4}×{(4×2)/5}だから M3rd(5/4)と m6th(8/5)は転回形
ってことは、M3rd(5/4)と m6th(8/5)はオクターブを挟んでシンメトリーな分割ってこと

自然倍音列（上方倍音）とその転回形（下方倍音） 上下の関係は基音を挟んでシンメトリー



転回形を第7倍音まで拡大すると MixoLydian♭6th が登場するが、第5倍音←第6倍音→第7倍音はシンメトリーにならない。

そもそもの問題は、

合理的なメロディを創る為に必要な等間隔のインターバル（旋律的欲求）をどうやって得るのか？ってこと

で、 そこにどーやって溶け合うインターバル（和声的欲求）を合体させるのか？ってこと

だった。

その

最高に溶け合う＝気持ちいい同士の上行 P5h を F^0 から12回繰返すと(どっから繰返してもいぃんやが)、

F^0 - C^1 - G^1 - D^2 - A^2 - E^3 - B^3 - $F\#^4$- $C\#^5$ - $G\#^5$ - $D\#^6$ - $A\#^6$ - （F^7）

てなかんぢで等間隔インターバルの12音が揃う。

これらをオクターブ内に収めちゃえば完璧な音律が、、、、、と。そーしょーとは、した

んだが、

ここで大問題が発生

実は、F の P5th＝3/2 周波数比を12回繰返しても7オクターブ上の F にはならない。$F^7 \neq E\#^7$ ってこと。

（$E\#^7 - F^7$＝23.46cent のピタゴラスコンマ、あとで説明）

それは何兆回とか何億万回とかどこまで繰返しても何オクターブ上かの F にゃならん。

※$(3/2)^x=(2/1)^y$ を満足させる整数 x、y が存在しない数学的証明

$(3:2)^x=(2)^y$

$3^x=2^{(x+y)}$

$x\times\log3=(x+y)\times\log2$

$x\times(\log3-\log2)=y\times\log2$

$x:y=\log2:(\log3-\log2)$ 故に整数 x と y は存在しない

よって、

キリが無いんで気持ちいぃのをガマンして、どっかで止めにゃならんくなった。

★「ドレミファ～はどっから来たんだ」ーその弐（なぜにダイアトニックは7音？）

それをピタゴラス（B.C.6世紀）は"数の哲学"により7個目で止めた。7は精神性を現す（ピタゴラス説）。

でもって、結果、

F^0 - C^1 - G^1 - D^2 - A^2 - E^3 - B^3 ⇒（オクターブ内に凝縮）⇒ F - G - A - B - C - D - E

リディアンが完成！

※それを中国（B.C.7世紀頃）では"歴との関連"で12個目で止めた。ツジツマ合ってないのを承知の上で。しかも、どっかでピッタリ合うんぢゃないかと、どこまでも下生（5度上）・上生（4度下）を繰返して追求したらしぃ。

※ちなみに、5個目で止めるとド・レ・ミ・ソ・ラのペンタトニックができる。その第5モードがブルース。古典邦楽のペンタは、その影響でピタゴラス音律になってる（3度が狂ってる）。

ちなみに、

5度堆積だけで13音目をだそーとすると7オクターブ必要になる。ってことは、2^7=128 だから、12音律作るために笛を 1/3 ずつ短くしていったら最後のオクターブを確かめる頃にゃ(2/3)^12≒1/128 の長さ（っつーか短さ）になっちゃってこれぢゃクワエられん。そこで、古代中国人は考えた。5度上 3/2（1/3 短く）の次はそれの転回形4度下 3/4（1/3 長く）、でもってそれの5度上（1/3 短く）の次はその転回形4度下（1/3 長く）、でもって、、、って3等分を繰返し省エネに努めた。それが三分損益法

で、そのリディアン（ファソラシ～）を、彼ら（古代ギリシャ人達）は実際、楽器にどーやって並べたか、っつーと、まず、4本弦の竪琴（テトラコルド）の両端音を5度ぢゃなくて耳チューニングが可能な最小音程4度（音色にもよるけど実際に共通倍音のビート数確認が実行可能なのは5度と4度が限界だろぅ）にして、それを外枠に間を埋めることにした。

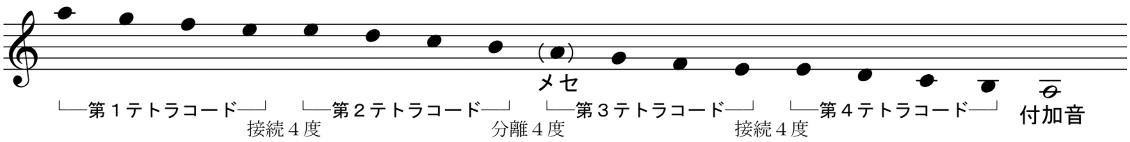
※4度枠の起源として「和声が5度を指向するのに対し、旋律＝声は4度を指向する」ってことも重要

このシドレミ（半音－全音－全音）の4音をコア音階として、オクターブを合わせた後、2つのコア音階を合体させると、オクターブで挟んで4度と5度がシンメトリーな〔シドレミ＆シドレミ〕＝〔ミファソラ＆シドレミ〕ができあがる。

これにて、古代ギリシャの最重要モード Phrygian は完成。
　な、こんなで
フリジアン（ミファソラ＆ミファソラ）の出発音をとっかえつつ、7つのモードをあやつるに至る。

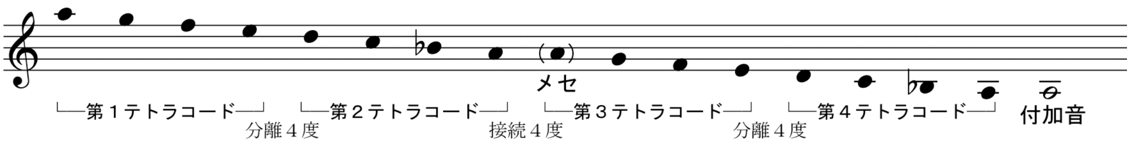
※古代ギリシャの最も基本的なチューニングは4台のテトラコード（Mi,Fa,So,La）を重ねた2オクターブの音階「完全組織」。これの出発音を変えてオクターブを切り取ったのがギリシャ旋法。で、この時期重要なのは、どの旋法でも最も重要な音は第3テトラコード（中央テトラコード）のいちばん上の音（メセ mese：中心音）だった。ってこと。それが La＝A 音

古代ギリシャの音階「完全組織」

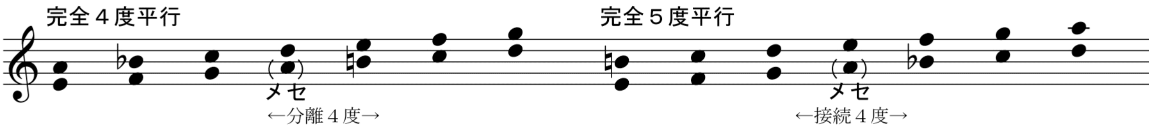


※第3テトラコードと第2テトラコードを接続的に構成すると Bb 音が登場する。分離4度の B♮と接続4度の B♭、その2つの B を導入することで、「完全組織」からは4度上＝5度下への転調、逆からは5度上＝4度下への転調が可能となる。

古代ギリシャの音階（転調の仕組み）



※しかも、2つの B を使い分ければ（B♮とB♭の並存）、完全な4度平行も完全な5度平行も可能になっちゃう。



※そして、2つの B によって当時（っていつだ。中世・ルネッサンスの頃ね）流行の「半音を中心にしたシンメトリー音階」＝6音音階＝ヘクサコードが3種になり、それぞれの出発音が主音・属音・下属音とよばれ、いつしかコーダルへと繋がってく。　硬い・軟らかいってのは、B♮を角ばった b、B♭を丸い b って書いてたから。それがやがて臨時記号 b=♭、h=♮=♯となる。

で、
様々なバリエーションを持ったギリシャ旋法～教会旋法だったんだけど、それらの中で Ionian（ドレミファソラシ）旋律は勿論特別な人気者、であるはずはなかった。旋律には合理的な理由がないからだ。Ionian が特別な人気を獲得したのは、2次音階（純正3度）を取り入れることによって、西欧において（のみ）和声が発展したからだ。、そこんとこをざっと説明しょぉ

オクターブの過分数的分割とその転回形

<table>
<tr><td>1/1</td><td>2/1</td><td>3/2</td><td>2/3×2＝
4/3</td><td>5/4</td><td>4/5×2＝
8/5</td><td>6/5</td><td>5/6×2＝
5/3</td><td rowspan="3">左記以外の周波数比</td></tr>
<tr><td>P1st</td><td>P8th</td><td>P5th</td><td>P4th</td><td>M3rd</td><td>m6th</td><td>m3rd</td><td>M6th</td></tr>
<tr><td colspan="4">1次音階</td><td colspan="4">2次音階</td></tr>
<tr><td colspan="2">絶対協和音
absolute consosonace</td><td colspan="2">完全協和音
perfect consonance</td><td colspan="4">不完全協和音
imperfect consonance</td><td>不協和音
dissonance</td></tr>
</table>

僕らはドミナント・エンジンが曲を展開していく「コード進行」っつーシステムを知ってはいる。が、重要なことを確認。まず、アリストテレス（B.C.384～322）が言うように『和音そのものはエトス（行動様式）を持たない』と考えるのが正解。音楽を進め

る主体が「旋律（多声性）」から「和声（多音性）」へと移っていく流れのなかで、旋律的役割をまったく持たない純粋な伴奏音が登場したんだが、そんな役目の音は18世紀以前にはまったく存在していなかった。よって、ドミナントコードの本質は、まず、その3度堆積の中に2つの限定進行音（旋律的役割・声部進行）を持っていることだと考えるべきで、その次に、それが不協和音 tritone-dissonance だったこと、最後に、その Root が属音だったこと、その3つが揃って、その後の和声進行（和音の解決）を決定づけたんだ、と考えろ（だから教会旋法の属音＝反復音は第5音とは限らなかった）。実際、教会音楽に Ionian, Aeorian が取り入れられたのは16世紀で、それにより教会旋法が12種（Locrian 以外6種の正格 authentic と、終止音が同じ4度下の変格 plagal）に拡張された。とゆー歴史がある。それまで少なくとも教会にはドレミファ～はなかったってことだ。

よ、0ーするに。
『最も自然の摂理に近い「5度堆積の7音」＝リディアン』～『テトラコルドの「最重要モード」＝フリジアン』～『チャーチスケール7種』～『いょいょ変態マニエリスム旋法か（16世紀）？』ってとこで、中世末期（15世紀）ドミナントの発見により、唯一ドミナントモーションに完全対応できたイオニアン（ドレミファ～）人気が爆発し、他は淘汰されてったってこと。

で、その西欧スタイルが、今になって世界のスタンダードになってるのは、
音程と時価の規定を文字ではなく音記号で表記する、よーするに定量記譜法（そこではじめて作曲者≠演奏者という図式が生まれる）が西欧で発展したからであり、それを作ったのが当時の音楽理論家＝僧、よーするに坊さんだったってわけだ。

でもって、めでたく落着。
ってことにならないのは、たびたび微妙に触れてるよぉーに、音程の合理化にあたり、純正5度（3/2）を基準にするってこと⇒2と3っつー数だけに頼るってことは、全音が大全音〔(3/2)^2÷2^1=3/2÷(2/3×2^1)=9/8〕に限られるってことになり（それが西欧古典音楽における5度と4度の優位性につながってるんだが）、それは純正3度を完全に排除するってことになってしまう。

※なんでかっつーと、
純正3度＝和声的3度（M3rd=5/4）を得るには素数5（第5倍音）を用いて分割せななならんから、っつーことは5度堆積から得る M3rd=〔(3/2)^4÷2^2〕=(9/8)^2 とで矛盾が生じる。からね

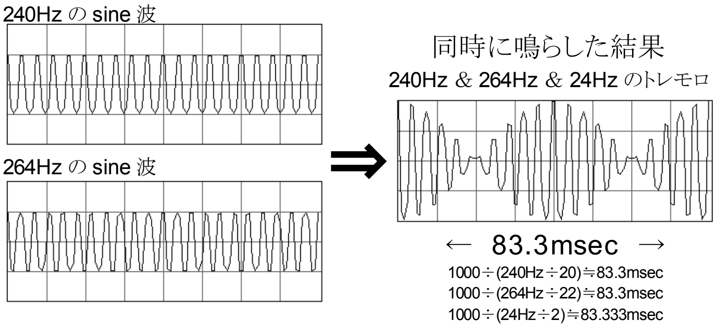
よーするに、あっちを純正にすると、こっちは純正にならん。こっちを協和音程にすると、あっちは協和音程にならん。っつー、矛盾の中で、無数の音律が生まれるに至る。（5度があってりゃ3度は少々狂ってるほーが美しいってな説もある）
と、は、
いっても、あまりにヒドイ不協和音の登場はムードを壊す。それぢゃ、どこまでならOKなんだ？
で、そもそもその協和音って？なんなんだ？っつーと、だな

★「ドレミファ～はどっから来たんだ」ーその参（協和音とは？＝ゼロビート）

その基準をザックリいっちゃうと
2つ以上の楽音を同時に鳴らした場合、
トレモロあり→不協和音
トレモロなし→協和音
ってこと。
ここから1ページ弱位、話しを判りやすくする為 sine 波をサンプルに進める、と

※周波数 a と b の2つの音を同時に鳴らすと a-b の周波数を持つウナリ beats を生じる。
例えば、440Hz と 439Hz を同時に鳴らした場合、440-439=1 なので、1Hz 周期のトレモロ（音量の強弱）が発生する。
$F_B=|f_1-f_2|$

たとえば、
2つの音、(a)240Hzと(b)264Hzの
2つを同時に鳴らせば
Ⅰ ⇒ 240Hzの a 音
Ⅱ ⇒ 264Hzの b 音
Ⅲ ⇒ a 音－b 音=｜24Hz｜周期のトレモロ
っつー、
必ず3つが鳴るってこと、ね。



実際問題、完全に**トレモロが発生しないインターバルはユニゾンとオクターブ以外には無い**。
※ユニゾンの場合には ⇒ 位相の違いで音量が変わるだけ
※オクターブの場合には ⇒ 位相の違いで波形が変わるだけ

よーするに、必ず3つ鳴ってるのに、
トレモロが0Hzだと事実上トレモロが無いってこと ←トレモロが音量変化か波形変化に転換される
でもって、例えば　トレモロが100Hzだと速過ぎてトレモロに聞こえん ←このトレモロが主観差音（後述）
ってことになっちゃう。

よーするに、2つの音の関係は

周波数の差が狭い ↓ 周波数の差が広い	協和音 ↓ 不協和音 ↓ 協和音	純正	①周波数がまったく同じ	1つの音
		準純正	②周波数が微妙に違う	トレモロ付き1つの音
		準重音	③周波数が微妙に違う	トレモロ付き2つの音
		重音	④周波数がまったく違う	2つの音

ってゆーふぅに徐々に変化する。ってこと(もっともっと周波数の差が広がるとオクターブ近くで再度トレモロが発生するんだけどね)

※逆の発想で、sine 波にトレモロだけ与えて2つの音を作るのが AM 合成方式のシンセ≒リングモジュレーター

で、

『②③周波数が微妙に違う』場合、その微妙さ加減によって、トレモロ周期が遅ければ程よく気持ちよく、トレモロ周期が速ければ激しく汚い雑音＝ヴォルフ。ってことなんやが、そこで感じる「②トレモロ付き1つの音」と「③トレモロ付き2つの音」の境目は人によって違っちゃう

しかも、

その「③トレモロ付き2つの音」と「④2つの音」の境い目を、どこに感じるかも、人によって違っちゃう＝臨界帯域幅。

んだけど、それらの不確定な事実を統計とってグラフ化すると、第三者的な不協和度数ができあがる＝不協和の数値化。

で、重要なのは

(例)・・平均律の半音・・

Bb2(233.1Hz)-A2(220Hz)=13.1Hz e.g. トレモロ付き1つの音(音程差が感じられんので Low interval limit にひっかかる)

Bb3(466.2Hz)-A3(440Hz)=26.2Hz e.g. トレモロ付き2つの音(トレモロ周期が概ね可聴範囲の下限)

Bb4(932.3Hz)-A4(880Hz)=52.3Hz e.g. 2つの音

っつーかんぢで

同じ半音でも、音高・帯域によってそのビート数は違っちゃう。ってこと

そして、そのトレモロの関係(協和音と不協和音の関係)は、勿論、基音だけぢゃなくて倍音にも当てはまる。

トレモロ周期(beats 数)と不快度の関係は音域によって変わるが、、、、、

※フレッチャーによるマスキングの臨界帯域(critical band for masking)

スペクトルレベル l_sdB の広帯域雑音が周波数 $_v$Hz の純音をちょうどマスクするとき、純音の強さのレベル l_vdB は

$l_v = l_s + 10\log_{10}\Delta_v$

であり、Δ_v がその周波数における臨界帯域幅である。

ここはザックリと

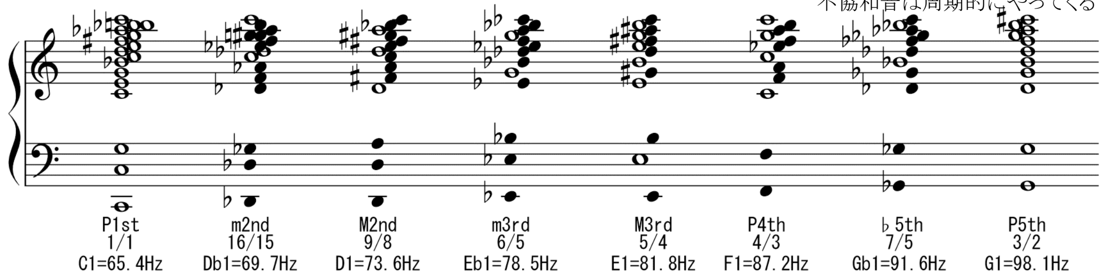
仮に高次倍音どうしの周波数の差が**3Hz以上30Hz以下**の場合を不協和音とした場合　そして、

仮に周波数差3Hz以上30Hz以下を**ひとつでも含んだインターバル**を不協和音程とするならば

↓

基音と倍音が発する各インターバルのトレモロ（トレモロ周期3Hz～30Hz⇒黒玉）

※各インターバルの中で倍音が発する不協和音は周期的にやってくる

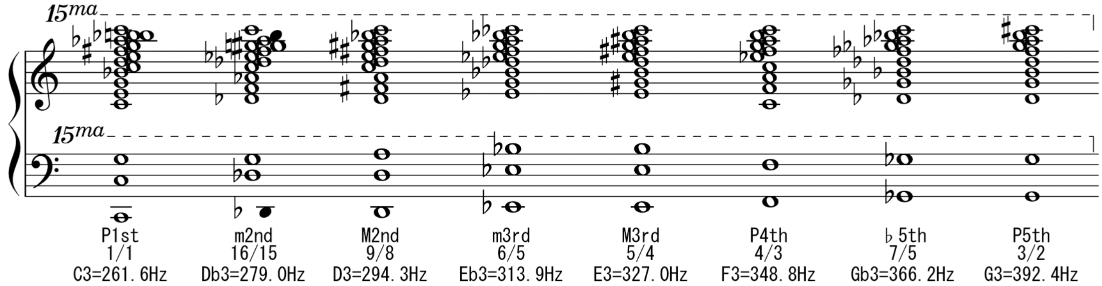


みてのとーり、ユニゾン・オクターブと P5th 以外はすべて不協和音程ってことになる。

※これよりもっと低域ならば P5th さえも不協和音程になる。

その、同じインターバル(周波数比)を2オクターブ上げると。

基音と倍音が発する各インターバルのトレモロ（トレモロ周期3Hz～30Hz⇒黒玉）



※これよりもっと高域ならば m2nd さえも協和音程になる。

こんなかんじで、不協和音は消えてしまう。

よーするに、
インターバルが同じでも音域によって不協和度は変わっちゃう。変わらないのは共通倍音の出没率だけ。
てことは、やっぱし、協和度を意識しつつ
等間隔のインターバルを持つ音律を作るには、共通倍音（とその近似値）の出没率を基準にするしかないのだ。

※例えば、三全音tritoneを不協和の代表とする根拠として、P1stの第3倍音と♭5thの第2倍音の間におこる半音差を指摘することがあるが、♭5thを7/5とするならばその差は119.4centであり（平均律なら102.0cent）、それだけの理由では
P1stの第3倍音とm2nd（16/15）の第3倍音の差=111.7cent
P1stの第3倍音とm6th（8/5）の第2倍音の差=111.7cent
P1stの第2倍音とM7th（15/8）の基音の差=111.7cent
と比べて特別な不協和とは言えなくなる。よって、和声以前に♭5th を最強不協和としたのは、あくまでもダイアトニック内での4度と5度との対比が思考ベースにあったから、と考えるべきだ。そーなると、音律の基準はますます共通倍音ってことになる。

そしてその、共通倍音は多けりゃ多いほど音律は溶け合う。

んだが、旋律的欲求（等間隔のインターバル）と和声的欲求（溶け合うインターバル）は最初から矛盾してるんだから、音律の終着点＝統一理論なんてのはあり得ん。だから延々とバリエーションが生まれ続ける

っつっても、そんなことばっかしやってたら音楽を創れんくなる。。。。。
そこで、だ、
旋律的欲求（等間隔のインターバル）**を完全に満たした平均律** ⇒和声的欲求もある程度満たす12等分平均律
と　**和声的欲求**（溶け合うインターバル）**を完全に満たした純正調** ⇒旋律的欲求もある程度満たす純正律バリエーション
に世界は2分された。

西洋音律の等分数が12なのは、西洋音楽のそもそもがオクターブの次に純正5度を求めたからであり、それが、転回形4度を含めた純正1・8・5・4度の近似値を満たす実用範囲の限界（聴感覚上の識別能力、奏法上の困難さ、楽器の価格高騰による普及への影響）＝最小の等分分割数＝12に繋がってるってことだ。

オクターブの等分平均における純正５度との誤差（20cent 以下を全て表記、但し等分数の倍数は同じになるので省略）

等分数	5	7	12	17	19	22	26	27	29	31	・・・・・	41	・・・・
純正５度との誤差	18.04	16.24	1.96	3.93	7.22	7.14	9.65	9.16	1.49	5.18	・・・・・	0.48	・・・・

※誤差は絶対値 cents。5度と4度の誤差はそれぞれ同じ cent 値で正負の関係にある。
12等分よりも「純正に近い等間隔インターバル」を求めるならば、それは、29等分か41等分或いはそれ以上になっちゃうってこと。

バリの5等分律、タイの7等分律、西欧の12等分律、アラビアの17等分律、インドの22等分律・・・ぜんぶここに登場してるってとこに注目。それは、ほとんどドコでも、でもって、古けりゃ古いほど、4度と5度が最重要音程として認識されてたってことを示唆する。

★「音律って？」ー①ーそもそも音律とは？ー

ここらへんからちぃっとずつそれっぽい用語が出てくるんで、その基本をまとめて解説しとく。

インターバル　→ 音響物理的には周波数比のこと。周波数比の逆比が弦長比になる

12等分平均律　→〔関数〕オクターブを12分割した時、半音数 n の周波数比が全部同じ音律のこと

$$f(n)/f(\text{基準音}) = \sqrt[12]{2^{\wedge}n} = 2^{\wedge}n\times(1/12) = 2^{\wedge}n/12$$

$$\text{よって、} f(n) = f(\text{基準音}) \times 2^{\wedge}n/12$$

セントcent　→〔逆関数〕ここでは平均律比 1/100 半音のこと。以後音律測定の基準値にしちゃう

$$2^{\wedge}n/12 = f(n)/f(\text{基準音}) \text{ の時、} \log_2(f(n)/f(\text{基準音})) = n/12$$

$$\text{よって、} \chi\ \text{cent} = n \times 100 = 12 \times \log_2(f(n)/f(\text{基準音})) \times 100$$

ビート　→ 2つの音の振動数の差 f(2) - f(1) の LFO 周期を持つ唸り（同音反復）。よーするにトレモロのこと。トレモロ付き1音に聞こえてた音が、周波数差が広がって可聴範囲に入ると f(2)と f(1)による重音（2音）に聞こえてくる。「音量の強弱」→「2つの音」＆「ついでにトレモロ周波数自体がピッチ」として聞こえちゃうらしぃ、それが f(2) - f(1) の差音

主観差音　→ 例えば、5度の差音＝f(G3) - f(C3)=f(C2)だからルートは C^1 のままだけど、4度の差音＝f(F3) - f(C3)=f(F1)になるから4度重音（C^3＆F^3）のルートは頭ん中で F^1 に感じる

和声的分割　→ 共通の数を一方の分子と他方の分母に持つインターバルへ分割すること。
P5th=3/2=6/4 から M3rd＆m3rd への和声的分割は 6/4＝6/5×5/4 になるが、
P4th=4/3=8/6 から m3rd＆M2nd への和声的分割は 8/6＝8/7×7/6 になる。西洋音律では5度の和声的分割と矛盾する4度の和声的分割＝素数7は用いない

n次音階　→ 3/2 とその逆比の2倍 4/3 が1次音階、それに 5/4 と6/5 を追加すると2次音階になる。西洋音律では2次音階までを自然音階エッセンスとしている為、7以上の素数を用いない。5度の和声的分割を選択したことが、そのまま西洋和声の3度堆積に繋がってる

波長　→ 空間を伝わる波（波動）の持つ周期的な長さのこと。〔音速＝波長×振動数〕、よって〔波長＝音速÷振動数〕。音速は摂氏15度（国際標準大気海面上気温）で340m/sと一定なので、振動数（周波数）が多いほど波長は短くなって、音は高く聞こえる

協和音程　→ 低次に共通倍音（最小公倍数倍音）を持つインターバル

協和音　→ 狭義ではゼロビート（トレモロ無し1音 or2音）のこと。単一周波数音（sine 波）どうしの重音の場合には、臨界帯域幅（不協和1音と別々2音のどっちに聞こえるかってな境目）を示す不協和曲線（純音～ビート発生～2音）によって不協和度が数値化される。それを倍音どうしにも適用して合体させれば、楽音の不協和度を数値化できる

純正調　→ 共通倍音が全部ゼロ・ビート（周波数が完全に同じ）のことで、純正律とは別

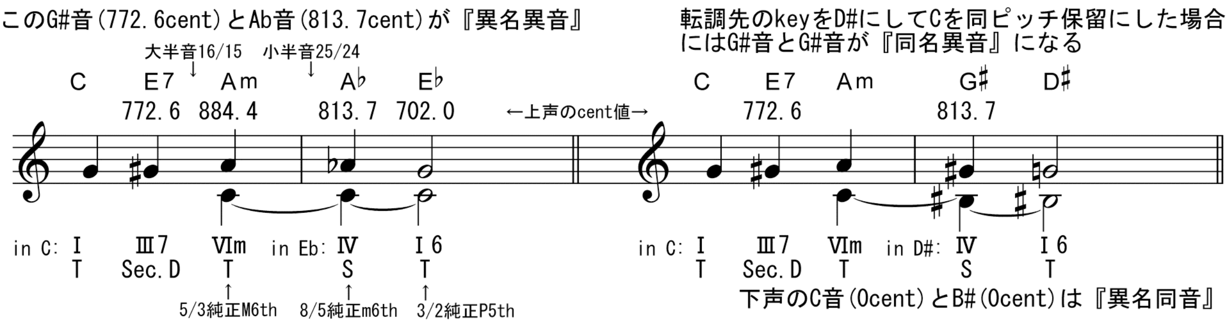
異名異音　→ 純正調だと転調のとき、どこを基準にするかで、たとえば G♯音と A♭音は別の音程ってことになる。。ならば、必要なだけ異名異音を追加し続けて、そんなこんなを慎重に計画立ててけば、完全な純正調（鍵盤）楽器を作れそうな気もしてくるが、、、、、、、、

くどいよーだが、そもそも
オクターブの次に最も単純な周波数比 P5th＝3/2 を何回繰返してもオクターブが合わん
P8th 基準のC^0～C^7 ⇒7オクターブ＝$2^{\wedge 7}$＝周波数比 128
P5th 基準のC^0～C^7 ⇒5度堆積で12音＝$(3/2)^{\wedge 12}$≒周波数比 129.7463379
それは何兆回とか何億万回とかどこまで繰返しても何オクターブ上かの F にゃならん。

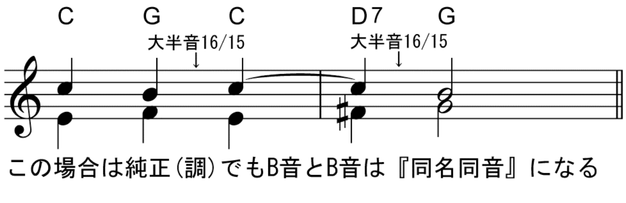
※$(3/2)^x=(2/1)^y$を満足させる整数 x、y が存在しない数学的証明 ←（前述 p.3 の通りなんで省略）

例えばC^0 を基準に5度を12回堆積すると7オクターブ上のC^7 になる。これが Cycle of 5th なんやが、純正5度と平均律のピッチが最初から違う（1.955cent）んで、7オクターブ上では 23.46cent も狂っちゃうことになる。この 23.46 のことをピタゴラス・コンマっつー。
$\{1200\times\log_2(3/2)^{12}\}-\{1200\times\log_2(2)^7\}\fallingdotseq 23.46001038$

たとぉえば、、、、



※こーなると、『純正調』エンハーモニックには
・同名同音
・同名異音
・異名同音
・異名異音
の4種ある。ってことになるんだが、、、



一般に『純正律』といった場合には、P5th（3/2）と M3rd（5/4）の堆積によって形成される音律を指す。
m（5度堆積）＋n（3度堆積）＝$(3/2)^m\times(5/4)^n$
素数 1, 2, 3, 5 によって得た自然音階7音を、白鍵〔全音階音〕にそのまま残し、黒鍵〔半音階音〕を追加してオクターブ内に配列すると

ってなことになる。よーするに、
『純正調』では無くて、この『純正律』を基準にすると、「異名異音」があって「同名異音」は無いってことにはなる。

ま、どっちゃにせよ、そこそこメロディが動いちゃったりする普通の曲ぢゃ、少なくともオクターブ内12音だけで純正調は無理だ、ってことはハッキリした。ぢゃ、いったい幾つ必要なのかっつーと、、、、、、答え：無限に必要。
、、、。無理だ無理だ。
純正調なんて絶対無理だ。
オクターブ内に何十個とか何百個とかの鍵盤があったらツマヨウジがないと弾けなくなる。
よーするに、調律変えが不要な
「完全な純正調（鍵盤）楽器なんてこの世にあり得ん」
ってことよ。
だからって、
まったく純正調を無視するってのは、和声との決別を意味する。
、、、だったらぢゃぁ
全部が無理なら"どこを純正にするんだ"っつー選択の違いで、いろんな音律がでけてきた。純正の『選択と拡張の歴史』ってことね

よーするに・・・、

どのインターバルをゼロ・ビートに設定するかで音律 temperament は区別される。
仮に**オクターブを純正**に取った場合、
P5th（3/2）を純正にすると自動的に P4th（2÷3/2=4/3）も純正になる。
M3rd（5/4）を純正にすると自動的に m6th（2÷5/4=8/5）も純正になる。
その両方 P5th（3/2）と M3rd（5/4）の両方を純正にすると自動的に m3rd（3/2÷5/4=6/5）も純正になる。
、、、でも純正どうしを重ねてくとオクターブが崩れてく。そして、シンメトリーは瓦解する。

どれを優先的に純正（ゼロビート）にするか？、ってこと。
で、その
高次倍音どうしのゼロ・ビートを感じる能力がイコール音楽力だったりもする。よーするに、ハーモニー力（りょく）みたいな。だからその、音楽力≒ハーモニー感ってのは平均律を基準にするしかない絶対音感とはまったくもって無関係っつーことだな。

★「音律って？」ー②ー知っとけ4つの音律基準ー

で、ちょいと具体的に
ここ2500年位の流れはこんなかんぢだ。全て自然倍音列とシンメトリーとのバランスが基準になっとるっつーとこに注目。

ピタゴラス音律→5度が純正。

P5th が 3/2（702cent）。ギリシャ音律のテトラコルドはこれ。単旋律のグレゴリアンチャントもこれ。日本もインドも元々はこれ。と、いわれているが、実際、5度内の分割・4度内の分割は極めて特殊な音程を成していた。旋律的間隔によって選ばれた音律の可能性にはまったく限界が無い。ってこと

※テトラコルド（4つの弦）ってのは4つの音による音列のこと。古代ギリシャの4弦竪琴（リラ）は、両端音が P4th インターバルになってて、その間の2本は適当なピッチに調律されてた。

純正律→3度が純正。

3度堆積を純正に響かせる為に、素数5を導入した。だから、「協和してるのがドミソの三和音」ってのは話しが逆で、ドミソが協和するよーな音律を採用したから協和してるってことだ。最初から7度の協和を意図的に排除してたんだから、四和音が不協和になるのはアタリマエ。これにて5度平行・4度平行は人気を失い、古典和声の発展は決定的となる。調和和声的分割はギリシャ時代に完成してたが15世紀にいきなり復活（ドミナント発見の時期と一致する）。

※トランペットとかの金管楽器（エジプト時代～）は物理的に純正律（特に純正調ド・ミ・ソとその平行）で鳴る楽器。よーするに、金管楽器は平均律で演奏することが不可能ってこと。

ウェル・テンペラメント→程よく純正。

ここでやっとこオクターブ12音での移調・転調が完成。調号が増えるにしたがって緊張度が増す（白鍵はミーン・トーン、黒鍵はピタゴラス、とか）よーにした。「ヴェルクマイスター第x法第y番」とか、純正の組合わせによって様々なバリエーションを持つ（バッハのクラヴィーア曲集発表の時期と一致する）。

※こいつのおかげでクラシックはいちいち「ロ短調 なんとか～」とかっつー曲名になってる。よーするに、key が変われば周波数比も変わるってこと。よって、「ロ短調 なんとか～」とかっつーよーな曲を平均律で再現するのは全く無意味。

十二等分平均律→オクターブだけ純正。

key を変えても周波数比が一定やから異名同音的変換によって転調の可能性がイッキに爆発。ギターとかマンドリンとかのフレット楽器は昔からこれ。平均律ピアノは1842年発売開始、19世紀後半から徐々に普及。Key が変わっても調律し直さなくていいんでめっちゃ便利。ただし調ごとの色彩感はゼロ（無調音楽発明の時期と一致する）。

※オクターブ以外は全部純正ぢゃ無いんで、とーぜん和音・重音の響きは全部唸る。っつっても旋律だけならなんら問題ないし、調性から外れたよーな音楽には向いてるってな考え方もアリ。
ピアノとかは真ん中付近が平均律になってるけど、高音側は高めに、低音側は低めに調整されてる⇒調律曲線（そーしないとなぜだか人間にはオクターブに聞こえない＝耳の錯覚）。

ま、
どれがいーとかわるいとかっつー
ことぢゃでんでん無くて、「完全な調律ってのが無い」から「いろんなバリエーションがある」ってこと。それから、原理を知っときゃコンピータでちょいっと再現し、ビート計算とか実験できちゃうってこと。で、音律作りから作曲がはじまると、、、、。
で、
音律の歴史は、音楽スタイルの歴史・会場の箱鳴り（リバーブタイム）の歴史・楽器の共鳴構造（個体共鳴＝固定フォルマント）の歴史・戦争史・人類史・・・・・とシンクしてるってこと。

た、、とえば、

リバーブタイムが長い石造りの教会内ぢゃ、前の音が残っちゃうんで、次の音はゼロビートぢゃないと気持ち悪い。よって、純正調で積み上げてく、と、複雑な和音はヴォルフを出すから、結果的に簡単な和音しか使えなくなる〜。とか

た、、とえば、

そもそもが全部狂ってる平均律の中だとaug4thとかM7thとかのインターバルも相対的に不協和度が薄れちゃうんで、結果、和音とその連結 Chord Progression は果てしなく複雑になっちゃって〜。とか

た、、とえば、

と、みてくるとさ
『自然倍音列』っつー単純明快な絶対秩序と、『オクターブのズレ』っつー決定的な不条理が常に同居してるっつーこの、音律のモアレ加減が、“音楽”←それなんだよなー。って思わんかい？

★「音律って？」ー③ー４つの音律その計算式ー

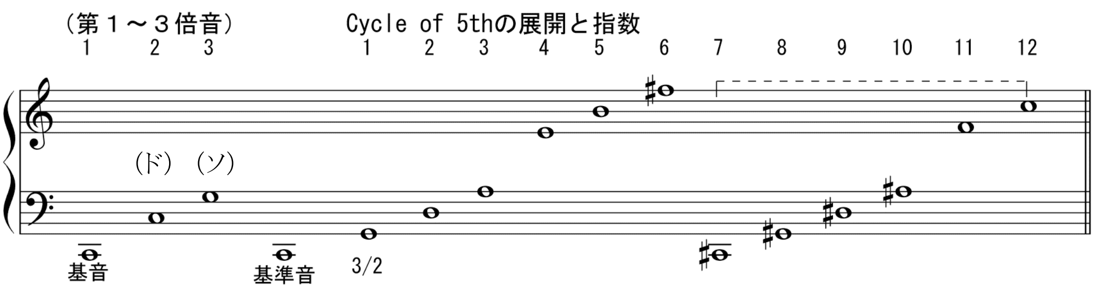
さらに具体的に、
その音律ってのを打込む方法なんやが、、、

●ピタゴラス音律（旋律の大功労者）

基準音 C1 を260Hzにした場合、第3倍音（ソ）と第2倍音（ド）の周波数比（3/2）から

260Hz×(3/2)=390Hz ⇒ C^1 が 260Hz で G^1 が 390Hz 。

と、P5th の周波数値が出る。
それを12回繰返す（3/2 の累乗）と12音の周波数（7オクターブ内）が出てくる。
それをオクターブで割ったら、12音の chromatic scale 出来上がり。



	C^1	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B	C^8
ratio	1/1							3/2					
		$(3/2)^7$	$(3/2)^2$	$(3/2)^9$	$(3/2)^4$	$(3/2)^{11}$	$(3/2)^6$		$(3/2)^8$	$(3/2)^3$	$(3/2)^{10}$	$(3/2)^5$	$(3/2)^{12}$
cents	0	113.7	203.9	317.6	407.8	521.5	611.7	702.0	815.6	905.9	1019.6	1109.8	1223.5

このC－Gの 702.0cent ってのがゼロビートの純正５度。
5度は全部完璧だけど、3/2 の繰り返しだけだと（3/2 と 3/4 を交互に繰り返しても同じ結果）オクターブが 23.46cent（ピタゴラスコンマ）狂っちゃうんで、〔5度上行 3/2^5回〕と〔5度下行 2/3^6回〕に分けてオクターブ内に配列したのがこれ。

ピタゴラス音階（B-F#の1箇所だけにピタゴラスコンマを集中させている為、他は全部純正5度）

	C^1	Db	D	Eb	E	F	Gb	G	Ab	A	Bb	B	C^2
ratio	1/1		$(3/2)^2$		$(3/2)^4$			3/2		$(3/2)^3$		$(3/2)^5$	
		$(2/3)^5$		$(2/3)^3$		2/3	$(2/3)^6$		$(2/3)^4$		$(2/3)^2$		2/1
cents	0		203.9		407.8			702.0		905.9		1109.8	
		90.2		294.1		498.0	588.3		792.2		996.1		1200

大全音	大全音	リンマ	大全音	大全音	大全音	リンマ
9/8	9/8	256/243	9/8	9/8	9/8	256/243
203.9	203.9	90.2	203.9	203.9	203.9	90.2

※2種類の半音の内、上行形の{(3/2)^7÷2^4}＝2187/2048（113.685cent）が古代嬰半音『アポトメー』

下行形の{(2/3)^5×2^3}＝256/243（90.225cent）が古代変半音『ピタゴラスリンマ』

アポトメー（2187/2048）÷ピタゴラスリンマ（256/243）＝ピタゴラスコンマ（531441/524288）

アポトメー（2187/2048）×ピタゴラスリンマ（256/243）＝大全音・トヌス（9/8）

大全音（9/8）×大全音（9/8）＝2全音・ディトヌス（81/64）

ディトヌス3回堆積{（81/64）^3}÷オクターブ（2）＝ディトヌスコンマ（531441/524288）

よって、ディトヌスコンマ＝ピタゴラスコンマ

上行形によるピタゴラスコンマの誤差を、下行形ピタゴラスリンマで埋めてるっつーイメージね。

C基準に純正5度を堆積した結果、上行形（♯）と下行形（♭）で異名異音になってるとこに注目。

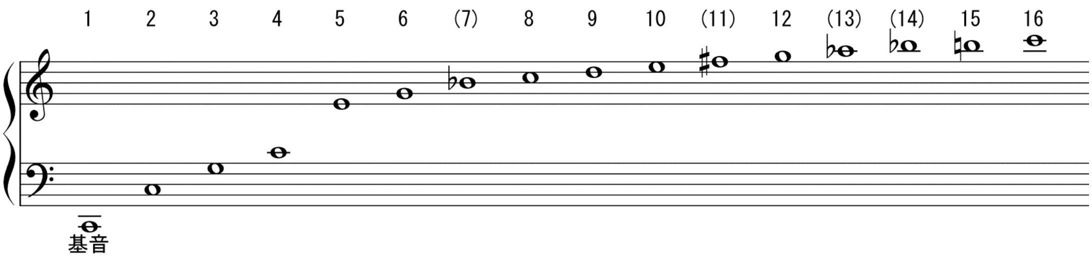
●純正律（和声の大功労者）

ピタゴラス音律最大の問題点は M3rd が 407.8cent ってことだった。（純正3度は 386.3137139・・・cent）

だったら、

5度（3/2）だけぢゃなくて、ほかのも全部倍音列から、っつー純な発想で低次の周波数比を拾ってくと、、、、、、、、

C1を基音とする自然倍音列（近似値）



	C^1	Db	D	Eb	E	F	Gb	G	Ab	A	Bb	B	C^2
ratio	1/1		9/8		5/4			3/2			7/4	15/8	2/1
		16/15		6/5		4/3	7/5		8/5	5/3			2/1
cents	0	111.7	203.9	315.6	386.3	498.0	582.5	702.0	813.7	884.4	968.8	1088.3	1200
アラビア音階⇒				中立3度 neutral third 27/22					中立6度 neutral sixth 18/11				
				354.5					852.6				

これで12音の内、7つの純正 M3rd と、5つの純正 m3rd を得た。が、これがそのまま純正"律"では無い。

純正律はより多くの純正3度を獲得する為、7以上の素数を放棄する。

※この E-F とB-C2 に登場する 16/15（111.7cent）を全音階に登場するから"全音階的半音"＝"大半音"

Eb-E とAb-A に登場する 25/24（70.7cent）を臨時記号によって登場するから"半音階的半音"＝"小半音"

ってゆー。

※更には C1-D とF-G とA-B に登場する 9/8（203.9cent）を"大全音"

D-E とG-A に登場する 10/9（182.4cent）を"小全音"

ってゆー。

※で、大全音と小全音の音程差(9/8)÷(10/9)＝81/80 を『シントニック・コンマ』ってゆー。

◆純正律の作成手順〔優先順位〕

①P8th（2/1 ; 1200cent）

②P8th（2/1 ; 1200cent） ＝ P5th（3/2 ; 702cent）×P4th（4/3 ; 498cent）

③P5th（3/2 ; 702cent） ＝ M3rd（5/4 ; 386.3cent）×m3rd（6/5 ; 315.6cent）

④M3rd（5/4 ; 386.3cent） ＝ 大全音（9/8 ; 203.9cent）×小全音（10/9 ; 182.4cent）

⑤m3rd（6/5 ; 315.6cent） ＝ 大全音（9/8 ; 203.9cent）×大半音（16/15 ; 111.7cent）

⑥小全音（10/9 ; 182.4cent） ＝ 大半音（16/15 ; 111.7cent）×小半音（25/24 ; 70.7cent）

⑦大全音（9/8 ; 203.9cent） ＝ 小半音（25/24 ; 70.7cent）×余剰音程（27/25 ; 133.2cent）

⑧大全音（9/8 ; 203.9cent） ＝ 余剰音程（135/128 ; 92.2cent）×大半音（16/15 ; 111.7cent）

純正律（黒鍵は小全音における大半音と小半音の逆転、及び大全音における⑦と⑧の選択と逆転で、それぞれ異名異音になる）

	C^1	Db	D	Eb	E	F	F#	G	Ab	A	Bb	B	C^2
ratio	1/1		9/8		5/4		*45/32*	3/2			*9/5*	15/8	2/1
				6/5		4/3			8/5	5/3			
cents	0		203.9	315.6	386.3	498.0	*590.2*	702.0	813.7	884.4	*1017.6*	1088.3	1200

半音		大半音	小半音	大半音	*余剰音*	*大半音*	大半音	小半音	*余剰音*	*小半音*	大半音
		16/15	25/24	16/15	*135/128*	*16/15*	16/15	25/24	*27/25*	*25/24*	16/15
		111.7	70.7	111.7	*92.2*	*111.7*	111.7	70.7	*133.2*	*70.7*	111.7

全音	大全音	小全音		大全音	小全音	大全音
	9/8	10/9		9/8	10/9	9/8
	203.9	182.4		203.9	182.4	203.9

※余剰音程 rest interval≒ディエシス（狭義ではピタゴラスリンマ 256/243 のことだったりもするし、広義ではシャープ♯のことだったりもする）

※♭Ⅲ・♭Ⅵ・♭Ⅶは、それぞれⅠ・Ⅳ・Ⅴの Minor Triad（1/1, 6/5, 3/2）から算出してみた、よって Bb 音は 9/5 になる

※ちなみに、インド音楽のスルティ算法ではオクターブを22分割し、大全音は4スルティ、小全音は3スルティ、半音は2スルティに等しいとされる。

よって、西欧流「自然音階」は

C → tonic
D → 3/2^2×1/2＝9/8
E → 5/4
F → 4/3
G → 3/2
A → 4/3×5/4＝5/3
B → 3/2×5/4＝15/8　　　　これにて、2次音階内の素数 1,2,3,5 のみでオクターブ内に7音が収まった。

んやが、これだと激しく5度が不純の場所

La（5/3）÷Re（9/8）＝40/27 ⇒680.4cent　　. . .（約 702cent が純正５度）

ってのが出てくる。

んで、いっそのこと大全音 9/8・小全音 10/9 の区別をなくして、主要箇所の全音を純正3度 5/4 のど真ん中

$\sqrt{(9/8)\times(10/9)}=\sqrt{(5/4)}=(\sqrt{5})/2$

よって、$1200\times\log_2\{\sqrt{(5/4)}\}^{1}$≒193.1569cent ←この全音のことを mean-tone（平均全音、中全音）ってよぶ

余剰音程は、$1200-\{1200\times\log_2\{\sqrt{(5/4)}\}^{5}\}$＝234.215715337912cent

に修正したのが、これ。

ミーン・トーン調律（中全音律。Whole Tone どうしのインターバルは純正5度と純正4度の中間にセットしてある）

	C^1	C#	D	Eb	E	F	F#	G	G#	A	Bb	B	C^2
cents	0	76.0	193.2	310.3	386.3	503.4	579.5	696.6	772.6	889.7	1006.8	1082.9	1200

mean-tone	mean-tone	mean-tone	mean-tone	余剰音	mean-tone
mean-tone	余剰音	mean-tone	mean-tone	mean-tone	mean-tone

M3rd は純正だけど、5度がちょっとだけ狂ってるとこに注目。

●ウェル・テンペラメント（調性の大功労者）

そぉーして特定の Key ではメチャメチャ溶けあう純正律だったけど、特定外の Key ぢゃ溶け合わん＝溶け合わす為に移調を犠牲にしてたもんで、更に、色んな修正を加えて、白鍵を基準にオクターブ内鍵盤12個だけで移調・転調しほーだい（遠くの Key に行くほど徐々に狂ってくる様に調整）にしたのがこれ。

8個の5度をゼロビート（702cent）にして、残る4個の5度を狭くする⇒ヴェルクマイスター
7個の5度をゼロビート（702cent）にして、1個は 700cent、残る4個の5度を狭くする⇒キルンベルガー
6個の5度をゼロビート（702cent）にして、6個の5度を 698cent にする⇒ヴァロッティ＆ヤング

ヴェルクマイスター第１技法第３番（不等分平均律）

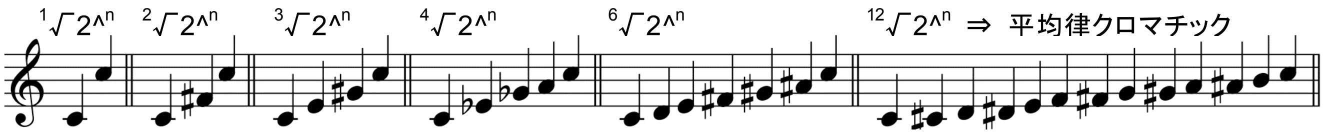
	C^1	C#	D	Eb	E	F	F#	G	G#	A	Bb	B	C^2
cents	0	90.2	192.2	294.1	390.2	498.0	588.3	696.1	792.18	888.3	996.1	1092.2	1200
←P5th	純正5度	696.1	純正5度	純正5度	純正5度	696.1	696.1	純正5度	696.1	純正5度	純正5度	純正5度	

ピタゴラスと純正律とを「上手に well・調節 temper」してある。ってこと

●十二等分平均律（ビバップの大功労者）
で、僕らが普段使ってんのが、この平均律。
　オクターブ以外全部ズレテルんだけど、全部平均って、それはそれでスゴイ秩序だ。
　計算式は簡単

$\sqrt[12]{2}^{\wedge n}$　　これだけ。

よーするに、12半音で周波数が2倍になるってこと。この式だけ知っときゃストラディバリウスにフレット打込める。



とか、、、ここではじめて異名同音（e.g. C#=Db）が決定的になっちゃった。ヴォルフを承知の上でね

※5乗根にすれば5等分平均律になるし、7乗根にすれば7等分平均律になるし、ルートん中の底を変えればオクターブ以外の平均律もできちゃう、ってな、五線譜を懐疑的に読む為の万能定理

十二等分平均律（異名同音）

	C^1	Db	D	Eb	E	F	F#	G	Ab	A	Bb	B	C^2
ratio	$\sqrt[12]{2}^{\wedge 0}$	$\sqrt[12]{2}^{\wedge 1}$	$\sqrt[12]{2}^{\wedge 2}$	$\sqrt[12]{2}^{\wedge 3}$	$\sqrt[12]{2}^{\wedge 4}$	$\sqrt[12]{2}^{\wedge 5}$	$\sqrt[12]{2}^{\wedge 6}$	$\sqrt[12]{2}^{\wedge 7}$	$\sqrt[12]{2}^{\wedge 8}$	$\sqrt[12]{2}^{\wedge 9}$	$\sqrt[12]{2}^{\wedge 10}$	$\sqrt[12]{2}^{\wedge 11}$	$\sqrt[12]{2}^{\wedge 12}$
cents	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200

cent 値が全部ピッタリなのは、これを基準にしちゃったってことだけだからアタリマエ。
逆にゆーと、ピッタリ（ラウンド・ナンバー）な cent 値は純正ぢゃないことを示す。ってこと
でもって
　音律発明時にゃ、この平均律 cent 値が重要な比較対照となる。
で、その算出法は。。。。。
〔関数〕$x=\alpha^{y}$ のとき、〔逆関数〕$y=\log_{\alpha}x$　ってのを使うと
〔関数〕$2^{\wedge n/1200}$ のとき、〔逆関数〕$n/1200 = \log_2(f(n)/f(\text{基準音}))$　ってことになるから

　　未知数 y（cent 値）＝ $1200 \times \log_2(f(n)/f(\text{基準音}))$　. そんなかんぢ

　常用対数を使うなら

　　未知数 y（cent 値）＝ $1200 \times \mathrm{Log}(f(n)/f(\text{基準音})) \div \mathrm{Log}(2)$　. . . . . そんなかんぢ

★「ドレミファ～はどっから来たんだ」ーその四（協和度のコントロールへ向けて）

そしてまた
最後にドレミファ～にもどるわけだが、
　結局、

　　　『協和とは＝ゼロ・ビート』（うなりが無い or 気にならん程うなりが速過ぎ）
で　　『不協和とは＝ヴォルフ』（うなる）
ってことだった。

　共通倍音付近どうしの振り幅が近い程、トレモロのギャップ比は大きくなるから（逆相による打ち消し合いと同じ原理）、ユニゾンもしくは過分数（n/(n+1)）に近いインターバルが最も協和しやすい、と同時に、最もヴォルフを発生しやすい、ってな愛と憎悪の二面性を持ったギリギリの関係だ。ってことになる

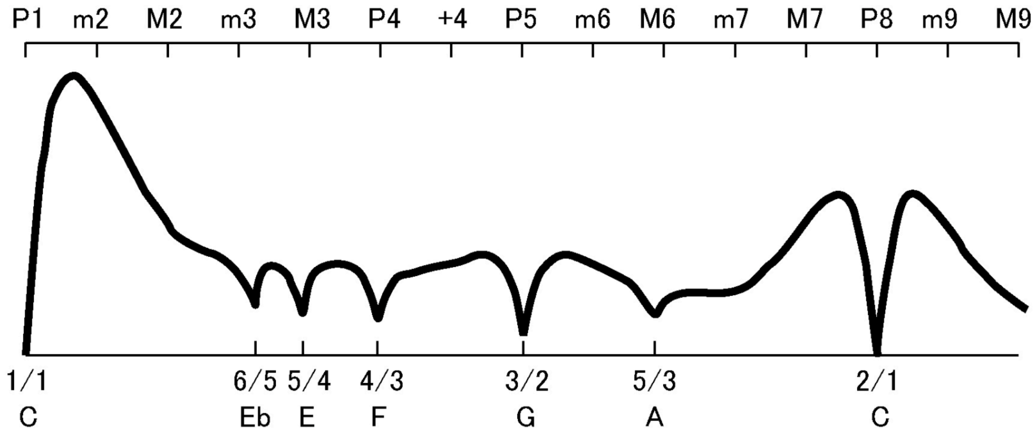
　よって、サイン波どうしなら、ある程度（たとえば半音とか）以上はなれた重音は、全部協和音ってことになっちゃう。

※サイン波どうしの半音が協和音・不協和音のどっちになるかは、その帯域で変わってくる（同じ半音でも低音域の方が周波数差が詰まってるからね）ってことだった。それを体系化したのが Low Interval Limit ってこと。

だ、けど、リアルワールドにおいてその話しの基準になってる単一周波数音（sine 波）ってのは、コンピータの中にしか存在しない。よーするに、この世の音っては、どれもこれもなんらかの部分音（倍音）を含んでるってなわけで、、、、。
　そこ、で、
前段にてさんざん言ってきた不協和曲線を、いよいよ楽音どうしの重音にて合体するわけだ。

鋸歯状波（公比 0.8 の等比級数）の2音（重音）をサンプルに使って、不協和度をグラフ化してみると、、、

不協和曲線と周波数比（整数倍音を持つ楽音）



こーなる。

　　ん～、これ見てるとたしかに12音律は理に適ってるっつーよーに思える。たしかに、そのと一りだ
　んが
　これは書いたるよーに"整数倍音を持つ≒整数倍倍音しか持たない＝西洋の楽器モデル"音をサンプルとしたグラフってとこが重要。

そもそも
　音が出るもんには

- **線状のモノ** ⇒ 弦（鍵盤楽器を含む）や笛（金管楽器を含む）
- **面状のモノ** ⇒ 太鼓とか（ティンパニとかの旋律打楽器を含む）
- **塊状のモノ** ⇒ 石とか鉄とか（ガムランとかの旋律打楽器を含む）

こんなんがあるけど、
この中で、原理的に整数倍音を持つのは『線状のモノ』だけだ、ってことが重要。←端と端が固定されてるから整数にしかならん
※厳密に言うと、弦長が短く、テンションが高いほど倍音比はズレてくる（インハーモニシティー）
　て、ことは
旋律打楽器で音楽作りゃ、不協和曲線の外で音律を扱うことが出来る！ってこと
　て、ことは
　コンピータを使って
不協和曲線を操作する＝スペクトルを変えちゃえばいぃぢゃん！ってこと

あとは、　心理学（統計データが必要）的に中域外のピッチ感には対数的な性格がある、ってことに注意して、先人たちには十分な敬意を払って、、、、、、、

よーするに、
「不協和とはトレモロのことで、そのトレモロスピードをめちゃめちゃ速くすると和音になる」
「無限大のトレモロバリエーションを均一の振り幅で堆積したのがホワイトノイズ」
「あらゆる自然音＆楽音はそもそも和音で、それを周波数比を保ったまま平行移動させたら音色になる」
　ってことだ
以上。

さぁ～、音律発明してみろ